

湖南省自然科学奖提名项目

“ n -平移箭图、 n -平移代数与高维代数表示论”

公示材料

项目名称： n -平移箭图、 n -平移代数与高维代数表示论

项目起止时间： 2004 年 1 月 1 日 至 2018 年 8 月 1 日

提名意见：

高维理论是代数表示论的一个崭新的研究领域，且与代数群、李理论和非交换代数几何等领域联系密切。郭晋云是最早进入这一领域研究的学者之一。在国家自然科学基金支持下，该课题以复杂度作为研究高维表示的不变量，引入 n -平移箭图、 n -平移代数等概念，并建立与 n -几乎可裂序列的联系；发展回头箭向、覆盖与截断方法并应用于 n -立方金字塔代数结构与表示、McKay 箭图与绝对 n -完全代数构造与表示研究；通过平凡扩张和高阶预投射代数，建立了 Beilinson 对应和 BGG 对应的一个代数版本。以独特的思想和方法，取得一系列具有开创性的成果，得到国内外同行认可，并逐渐在相关领域研究产生影响。

郭晋云教授及团队长期潜心科研，所做工作得到了国内外同行的认可和肯定。申报材料真实有效，经公示无异议。鉴于该项成果的科学意义和学术影响，经学术委员会讨论，一致认为该成果达到了国际领先的学术水平，郑重推荐其申报湖南省自然科学一等奖。

项目简介：

从上世纪七、八十年代开始，代数表示论研究取得了一系列重大突破。遗传代数的分类，Auslander-Reiten 理论、倾斜理论、覆盖理论的创立，使得代数表示论得到飞速发展，并与李理论、量子群、代数几何等许多数学领域相互渗透、相互促进。上个世纪末，我们发现代数表示理论具有很强的一维特征，进而以 Koszul 自入射代数为切入点研究代数表示论高维理论，希望用代数和组合的方法建立代数表示论高维理论，以 McKay 箭图表示为驯化代数表示理论的推广，通

过二次对偶应用到非交换代数几何，并寻求在其他领域的应用。

本项目引入 n -平移箭图、 n -平移代数、 τ -切片代数、对偶 τ -切片代数、 τ -网床与 τ -形变等概念；证明 n -平移代数的二次对偶代数有限生成投射模分次在一定条件下存在 n -几乎可裂序列；发现了与高维表示相关的回头箭向构造，建立回头箭向、覆盖和截断研究高维表示理论的方法；应用这一理论方法，本项目引入 n -立方金字塔代数，给出其迭代构造，指出其与 Iyama 绝对 n 完全代数的联系。本项目利用复杂度理论研究稳定 n -平移代数表示与分类问题：证明对有限复杂度自入射代数，复杂度给出其分次表示范畴的滤链，也给出其有限生成分次模的滤链；推广 Loewy 矩阵方法，给出分次代数成为 τ -切片代数的判定法则，并对 n -平移代数进行分类；对一类 τ -切片代数，证明其二次对偶是拟 n -Fano 代数，且其一个扭平凡扩张的二次对偶同构于其二次对偶的高阶预投射代数，建立了 Beilinson 对应和 BGG 对应的一个代数版本。本项目研究 McKay 箭图结构及其在高维表示理论中的应用：引入 m 维 McKay 箭图的 m -Cartan 矩阵，观察到群的维数向量恰为该矩阵定义的二次型的零点；刻画了有限 Abel 群 McKay 箭图；利用 McKay 箭图的回头箭向、覆盖和截断，刻画了 Iyama 的 $(n-1)$ -Auslander 绝对 n -完全代数的锥构造。

本项目独立发展了以代数和组合方法为特色的代数表示论高维理论研究框架，建立起与非交换代数几何等领域的联系。项目成果得到了包括 MIT 美国艺术与科学院士 Etingof 多次他引，据检索有 20 次他引。来自代数群、量子群表示理论[引用 1, 2, 3, 6]和非交换代数几何[引用 4, 5]相关研究的引用表明本项目研究的意义不仅限于代数表示论，引起相关研究领域的兴趣。项目成果具有国际领先水平。

客观评价：

代数表示论高维理论是新世纪代数表示论的一个崭新的研究领域，本项目与日本名古屋大学伊山修（Osamu Iyama）教授几乎同时开始高维代数表示论研究。Iyama 从同调和交换代数方法入手，推广建立高维 Auslander-Reiten 理论。本项目利用组合和代数方法，引入 n -平移代数，发展回头箭向、覆盖和截断理论方法研究代数表示论高维理论；通过复杂度刻画和分类高维表示理论，利用 McKay 箭图刻画高维驯化理论。建立 Beilinson 对应和 BGG 对应代数版本。2018 年，Iyama 在里约国际数学家大会作“Tilting Cohen-Macaulay representations.”邀请报告 [In:

Proc. Internat. Congress of Mathematicians Vol. II. Invited lectures, 125 – 162, World Sci. Publ.,2018.], 综述交换代数与代数表示论研究的最新进展, 其中 d -表示有限代数、 d -表示无限代数和高阶预投射代数起了非常重要的作用。这些代数与 τ -切片代数的二次对偶和平凡扩张构造联系密切: Iyama 在该报告中指出, d -表示无限代数是交换代数几何中极端 Fano 代数, [代表作 5]定理 6.1 指出 Koszul 稳定 n -平移代数的 n -切片代数的二次对偶是拟 Fano 代数; Minamoto 和 Mori 在[The structure of AS-Gorenstein algebras, Adv. Math. 226(2011), 4061-4095]证明拟 Fano 代数的预投射代数是 AS-正则代数并具有 Beilinson 对应 (其有界导出范畴与其预投射代数的非交换射影概型凝聚层范畴有界导出范畴作为三角范畴等价), [代表作 5, 定理 6.4, 推论 6.6]指出对于 Koszul 稳定 n -平移代数的齐次 τ -切片代数, 其一个扭平凡扩张的二次对偶同构于其二次对偶的高阶预投射代数, 作为推论, 在特殊情形[代表作 5, 推论 6.8], 该预投射代数非交换射影概型凝聚层范畴导出范畴与一个 n -平移代数稳定有限生成分次模范畴作为三角范畴等价, 即有一个 BGG 对应, 这样[代表作 5, 定理 6.4, 推论 6.6, pp1696]可以视为 Beilinson 对应和 BGG 对应的一个代数版本。[代表作 6]的定理 9 指出 n -立方金字塔的二次对偶恰好是 Iyama 的绝对 d -完全代数 (一类重要的 d -表示有限代数)。这些事实显示本项目相关概念和结果与 Iyama 高维表示理论及相关非交换代数几何的联系。

[代表作 1]引入 n -平移箭图、 n -平移代数, 发展回头箭向、覆盖与截断方法, [代表作 6]引入并研究 n -金字塔代数。英国 East Anglia 大学 Joseph Grant 发表在 Doc. Math.的论文推广代数群表示中的拉链代数, 研究高维拉链代数引用[代表作 1]和[代表作 6], 指出高维拉链代数 “一般情形已出现在郭和罗所研究 n -立方金字塔代数中”, “作者发现郭和罗已经研究了这些代数”, “郭和罗用生成元和关系定义的代数 $\tilde{\Lambda}_g(d)$ 对应这里的 Z_d^s , 他们证明这些代数可由他们称为 n -立方金字塔代数的平凡扩张给出”, “在[ZLZ17] (本项目成员研究论文, 推广[代表作 7]结果)和[Guo 16]([代表作 1])中还研究了扭平凡扩张、斜群代数和 McKay 箭图”, 英国 East Anglia 大学 Gabriele Bocca 在其博士论文引用[代表作 1]和[代表作 6], 指出 “历史上, 高维拉链代数首先作为与高维表示理论中与平移箭图相关而由[Guo16]和[GL16] (即[代表作 1、6])引入, 称为 n -立方金字塔代数。”。

[代表作 3]利用复杂度研究 Koszul 自入射代数与表示。美国华盛顿大学张坚与安徽大学鲍炎红教授和杭州师范大学何济位教授合作在 J. Noncommut. Geom 发表论文、与厦门大学陈健敏教授等人合作在 Algebra Number Theory 发表论文, 研究导出范畴的自函子、商范畴及 AS 正则代数的 Hopf 作用时, 引用了本项目的在复杂度方面的研究[代表作 3], 多次指出 “代数和模的复杂度是研究有限维

代数表示重要的不变量”。

[代表作 4]引入 m -Cartan 矩阵研究高阶 McKay 箭图。美国 North Carolina 州立大学景乃桓教授与合作者在 *Acta Math. Sin.* 发表研究三阶广义 McKay 箭图的论文, 指出 McKay 箭图的 n -Cartan 矩阵与其 $1/2A$ 类似, [代表作 4]中“利用 Kac 方法研究了一般 McKay 箭图的 n -Cartan 矩阵许多有趣及类似的性质。”本项目的结果和方法也为不同领域研究所引用。MIT 教授、美国科学院院士 Pavel Etingof 在 *Adv. Math.* 发表论文, 研究正特征对称张量范畴的 Koszul 对偶和 PBW 定理, 引用了本项目关于几乎 Koszul 自入射代数 Yoneda 代数结构的结果[代表作 8]证明其推论 5.6。美国华盛顿大学教授张坚和安徽大学鲍炎红教授, 杭州师范大学何济位教授合作 *J. Noncommut. Geom.* 发表论文研究半单 Hopf 代数作用下 AS 正则代数不变子环同调性质在其引理 4.4 证明引用[代表作 3, 引理 2.7]。Joseph Grant 发表在 *Doc. Math.* 的论文还直接用了[代表作 6]的定理 6, 和项目组成员用中文发表在《数学进展》一篇证明 McKay 箭图的“回头箭向”可通过平凡扩张实现的结果和证明其命题 5.4。南京大学黄兆泳教授与合作者发表在 *J. Algebra* 上研究极大 n -自正交子范畴的论文中, 其例 5.5 引用[代表作 7, 定理 7.1] (所引用版本为预印本, 定理 6.1)。南京大学黄兆泳教授在与合作者发表在 *Comm. Algebra* 上研究 n -强 Gorenstein 投射、内射和平坦模引用[代表作 7, 定理 7.1]证明其命题 3.15。

代表性论文专著目录:

[代表作 1] Guo, Jin Yun: On n -translation algebras. *J. Algebra* 453 (2016), 400 – 428.

[代表作 2] Guo, Jin Yun: Coverings and truncations of graded self-injective algebras. *J. Algebra* 355 (2012), 9 – 34.

[代表作 3] Guo, Jin Yun; Li, Ai Hua and Wu, Qiu Xian: Selfinjective Koszul algebras of finite complexity. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 25 (2009), no. 12, 2179 – 2198.

[代表作 4] Guo, Jin Yun: On the McKay quivers and m -Cartan matrices. *Sci. China Ser. A* 52 (2009), no. 3, 511 – 516.

[代表作 5] 郭晋云和万前红: n -平移代数, 平凡扩张与预投射代数. *中国科学. 数学* 48(2018), 1681 – 1698.

[代表作 6] Guo, Jin Yun and Luo, Deren On n -cubic pyramid algebras. *Algebr. Represent. Theory* 19 (2016), no. 4, 991 – 1016.

[代表作 7] Guo, Jin Yun: McKay quivers and absolute n -complete algebras. *Sci. China Math.* 56 (2013), no. 8, 1607 – 1618.

[代表作 8] Zheng, Lijing: Yoneda algebras of almost Koszul algebras. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 125 (2015), no. 4, 477 – 485.

主要完成人情况

一、郭晋云，现任湖南师范大学教授、博士生导师，2006–2011 任湘潭大学教授博士生导师。

参加本项目的起止时间 2004 年 01 月 01 日至 2018 年 8 月 1 日。

对本项目重要科学发现的贡献：提出项目的思路并主持、指导项目研究。提出 n -平移箭图、 n -平移代数等概念并建立回头箭向、覆盖和截断理论方法，提出利用复杂度研究 Koszul 自入射代数并参与指导其研究，提出复杂度作为研究高维表示不变量，指导并参与证明了 τ -切片代数平凡扩张与其二次对偶的高阶预投射代数的二次对偶同构，提出应用 McKay 箭图研究高维表示理论并研究 McKay 箭图构造，提出 n -立方金字塔代数并指导研究其性质。独立完成代表作 1, 2, 3, 论文 7。并合作完成代表作 3, 5, 论文 6 在合作中主要提出问题并指导研究。对科学发现 1, 2, 3 都有贡献。

二、万前红，现任湖南工商大学讲师，公共数学教研室主任。

参加本项目的起止时间 2008 年 09 月 01 日至 2018 年 8 月 1 日。

对本项目重要科学发现的贡献：通过复杂度给出了 τ -切片代数和对偶 τ -切片代数的一个分类。参与证明 τ -切片代数的某个扭平凡扩张的二次对偶同构于其二次对偶的 $(n+1)$ -预投射代数。且在分次凝聚的情形下，其非交换投射概型的凝聚层范畴的有界导出范畴与一个有限维代数的有界导出范畴和一个有限维自入射代数的分次稳定范畴三角等价。对应[代表作 5]，属于科学发现 2。

三、郑立景，现任南华大学讲师，工程数学教研室副主任。

参加本项目的起止时间 2011 年 09 月 01 日至 2016 年 12 月 31 日。

对本项目重要科学发现的贡献：研究几乎 Koszul 的自入射代数及其 n -平移代数的关系。证明了在几乎 Koszul 的自入射代数的情形，它的 Yoneda 代数是其二次对偶的扭多项式代数。对应[代表论文 8]，属于科学发现 2。

四、罗德仁，现任湖南理工学院副教授。

参加本项目的起止时间 2013 年 09 月 10 日至 2018 年 8 月 1 日。

对本项目重要科学发现的贡献：研究 n -立方金字塔代数。通过截断、扭平凡扩张等方法，给出了其迭代构造，并通过二次对偶建立了其与 Iyama 的绝对 n -完全代数的联系。证明了这一类代数为周期代数，并且给出了任意合数周期的周期代数实例，给出了任意数对 (p, q) 的 (p, q) -Koszul 代数的实例。对应[代表

论文 6], 属于科学发现 1、3。

五、吴求先, 现任湖南师范大学讲师。

参加本项目的起止时间 2004 年 01 月 01 日至 2018 年 8 月 1 日。

对本项目重要科学发现的贡献: 证明自入射 Koszul 代数, 复杂度为无穷或者一个正整数(定理 3.3), 将复杂度分类应用于根三次方为零的自入射代数(即稳定 1-平移代数), 而得到经典的表示分类(定理 7.1)。对应[代表作 3], 属于科学发现 2。

主要完成人合作关系说明:

本项目由郭晋云、万前红、郑立景、罗德仁和吴求先五位完成人合作完成
请详见下面的完成人合作关系情况汇总表; 五位完成人依托国家自然科学基金在湖南师范大学和湘潭大学开展合作研究, 有自然形成的合作关系, 特此说明!

主要完成人合作关系情况汇总表

序号	合作方式	合作者/排名	合作时间	合作成果	证明材料	备注
1	合作论文	郭晋云 万前红	2009-2018	论文	代表作 5	
2	项 目 主 持、参与	郭晋云 郑立景	2011-2018	论文	论文 8	
3	合作论文	郭晋云 罗德仁	2013-2018	论文	论文 6	
4	合 作 论 文, 项 目 主持、参 与	郭晋云 吴求先	2004-2018	论文	代表作 3	